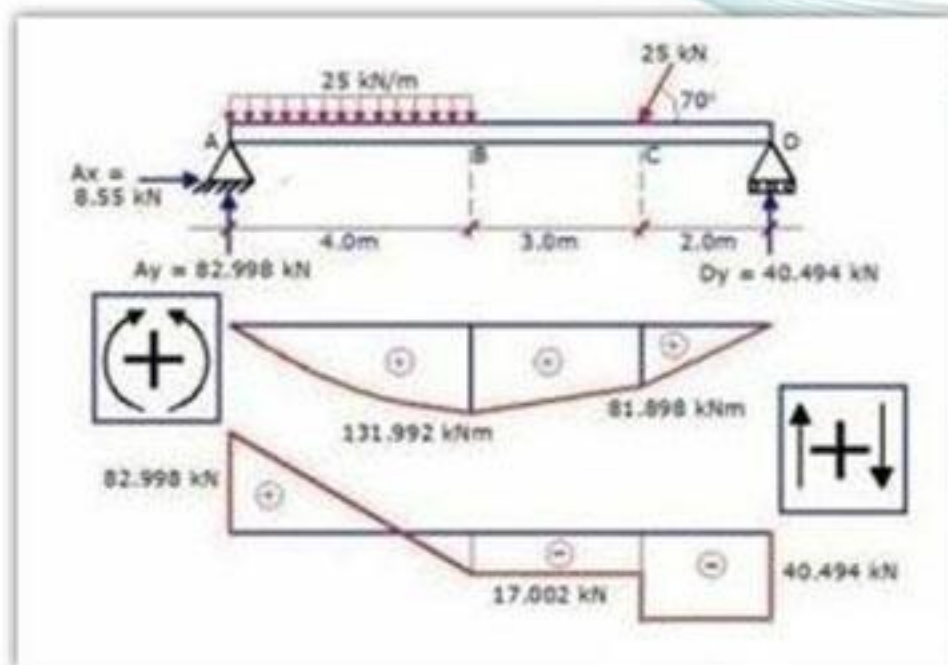


حل تشریحی سوالات تحلیل سازه و مقاومت مصالح، دکتری ۹۸



نویسنده: تیم شیرزادی

- سازه
- معماری
- آب
- خاک
- راه



۱- در یک تیر بر روی بستر ارتجاعی به طول ۴m و مقطع مستطیلی به عرض ۱۲cm و عرض ۴cm تحت اثر بار گسترده یکدانه به شدت q، اگر عکس العمل بستر به صورت خطی از صفر در کناره ها تا حداکثر در وسط تیر تغییر کند، حداکثر تنش خمشی مجاز ۱۲۰ مپا باشد، حداکثر مقدار مجاز q چند $\frac{kN}{m}$ است؟

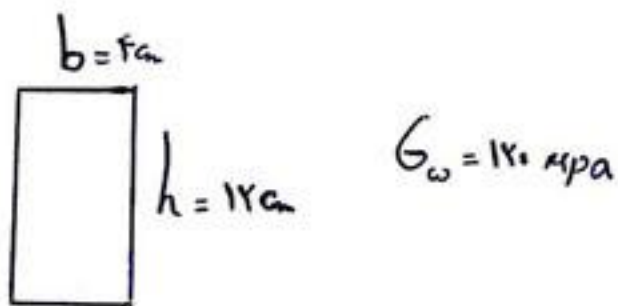
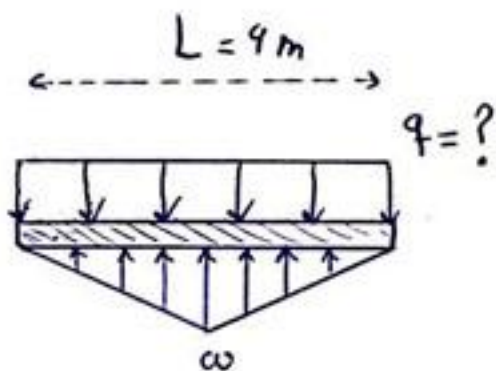
۷,۱۹۸ ۲۴

۵,۱۲ ۱۳

۳,۱۸۴ ۲۲

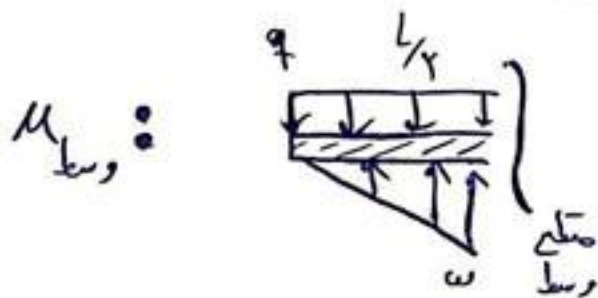
۲,۵۲ ۱۱

حل: گزینی ۴ صحیح است.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{\omega L}{2} = qL \rightarrow \omega = 2q$$

با فرض حداکثر شدن لنگر در وسط تیر:



$$\Rightarrow M_{\text{وسط}} = \left| q \frac{L}{2} \left(\frac{L}{4} \right) - \omega \frac{L}{2} \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \times L \right) \right| = \frac{qL^2}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{M_C}{I} \ll G_{\omega} \Rightarrow \frac{\left(\frac{qL^2}{24} \right) \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{bL^3}{12}} \ll G_{\omega} \Rightarrow q \ll \frac{4bh^2G_{\omega}}{L^2}$$

باگذاری b, h, L, \rightarrow $q_{\text{max}} = 7,198 \frac{kN}{m}$

۲- در یک مقطع دیوار نازک قطری به شعاع متوسط R ، ضخامت t ، تحت یک نیروی متحرک P اعمالی به اندازه قطر محلی در محل شعاع متوسط در تراز قطر افقی (سمت چپ یا راست)، تنش برشی حداکثر چه ضریبی از $\frac{P}{\pi R t}$ است؟

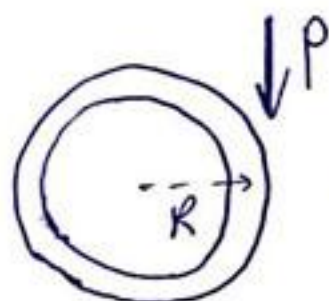
۲ « ۴

$\frac{۳}{۲}$ « ۳

۱ « ۲

$\frac{۱}{۲}$ « ۱

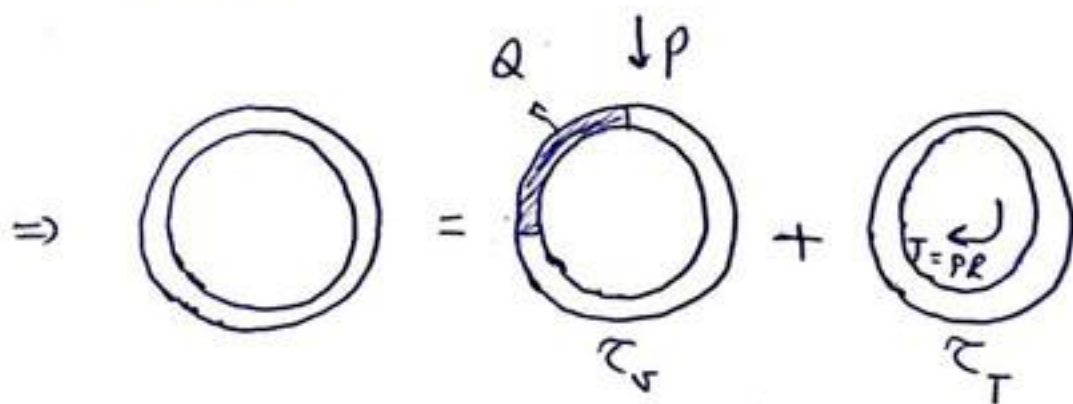
حل: گزینوی ۳ صحیح است.



انتقال بار P به محل مرکز برش



در مقطع هم تنش برشی ناشی از P در هم ناشی از تنش برشی داریم.



$$\Rightarrow \tau_{max} = \tau_v + \tau_T = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{rA_o t}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{(P) \left[\frac{V \pi R}{t} \left(\frac{V R}{\pi} \right) \right]}{(\pi R^3 t) (t)} + \frac{PR}{2(\pi R^2) t} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi R t}$$

۳- ورقه به شکل مربع از یک طرف توسط چهار جداره‌ی صلب و ثابت نگه داری شده است. اگر دمای ورق به اندازه‌ی 50°C افزایش یابد، تنش نرمال ایجاد شده در صفحه چند μPa است؟ $(E=200\text{GPa})$ ، $\nu=\frac{1}{4}$ ، $\alpha=9 \times 10^{-6}$ ، ضرایب ورق طوری است که گمانش ندارد در تنش عمود بر صفحه ضرایب

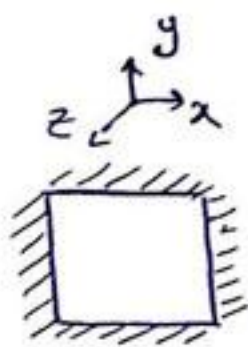
۱۸۰ «۴

۱۲۰ «۳

۹۰ «۲

۶۰ «۱

حل: گزینی ۳ صحیح است.



$$\sigma_z = 0$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0$$

به دلیل تقارن $\sigma_x = \sigma_y$ می‌باشد.

$$\text{رابطه‌ی بولاسن: } \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) + \alpha\Delta T = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_y \rightarrow \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_x) = -\alpha\Delta T \Rightarrow \left(\frac{1-\nu}{E}\right) \sigma_x = -\alpha\Delta T$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{-\alpha\Delta T E}{1-\nu} \xrightarrow[\text{مقادیر}]{\text{جاگذاری}} \frac{-9 \times 10^{-6} \times 50 \times 200 \times 10^9 (\mu\text{Pa})}{1 - \frac{1}{4}} = -120 \mu\text{Pa}$$

۴- یک سیم به طول L ، سطح مقطع A و وزن مخصوص γ از یک تکیه گاه

گرفتار آویزان است. اگر رابطه‌ی تنش-کشش به صورت $\epsilon = B\sqrt{\sigma}$

(B ضریب ثابت) باشد، افزایش طول انتهای سیم به ضریبی از $\frac{\gamma L^2}{B^2}$ است؟

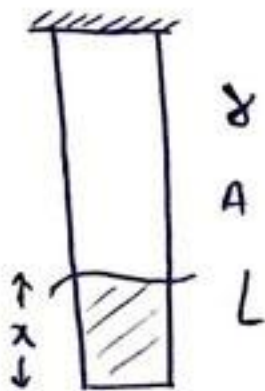
$$\frac{A}{3} \ll 4$$

$$\frac{A}{2} \ll 3$$

$$\frac{1}{3} \ll 2$$

$$\frac{1}{2} \ll 1$$

حل: کشش $\sigma = \frac{F}{A}$ = ضریب کشش.



$$\sigma(x) = \frac{F}{A} = \frac{\text{وزن}}{\text{مساحت}} = \frac{\gamma \Delta x}{A}$$

$$\Rightarrow \sigma_w = \frac{\gamma A x}{A} = \gamma x \quad \text{I}$$

$$\sigma = B\sqrt{\epsilon} \quad \text{II}, \quad \epsilon = \frac{d\Delta x}{dx}$$

تعریف کشش جزئی

$$\Rightarrow \text{I, II: } \gamma x = B\sqrt{\frac{d\Delta x}{dx}} \Rightarrow \left(\frac{\gamma x}{B}\right)^2 = \frac{d\Delta x}{dx}$$

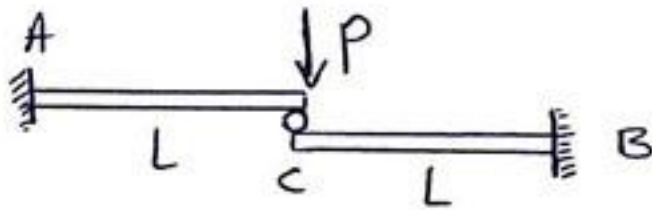
$$\Rightarrow d\Delta x = \frac{\gamma^2 x^2}{B^2} dx \rightarrow \Delta x = \int \frac{\gamma^2 x^2}{B^2} dx$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{\gamma^2 x^2}{B^2} dx = \frac{1}{3} \frac{\gamma^2 L^3}{B^2}$$

تغییر طول انتهای

۵ - تیر ترکیبی ABC مطابق شکل در محل غلتک (بدون اصطکاک) تحت اثر نیروی P قرار دارد. اگر سختی خمشی EI باشد، M_A و M_B ، A_y و B_y کداسند؟

$$\frac{P}{2}, \frac{P}{2}, \frac{PL}{2}, \frac{PL}{2} \text{ "۱"}$$



$$\frac{P}{2}, \frac{P}{2}, PL, PL \text{ "۲"}$$

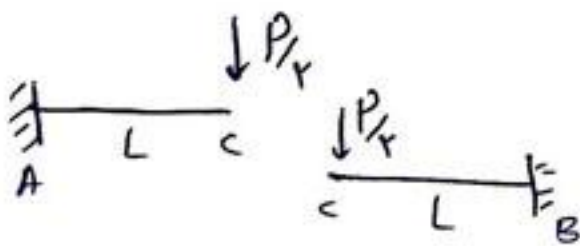
$$P, P, \frac{PL}{2}, \frac{PL}{2} \text{ "۳"}$$

$$P, P, PL, PL \text{ "۴"}$$

حل: گزینشی! صحیح است.

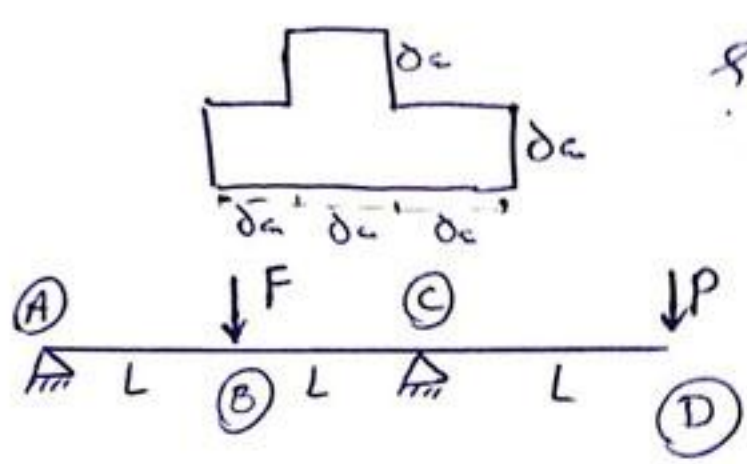
تیرهای AC و BC، $\frac{3EI}{L^3}$ ی باشند، پس بار P به نسبت

صداوری بین آنها تقسیم می شود:



$$\Rightarrow \begin{cases} M_A = M_B = \frac{PL}{2} \\ A_y = B_y = \frac{P}{2} \end{cases}$$

9- تیر ABCD با سطح زیر (ایجاد C_m) تحت $\frac{F}{\gamma}$ نیروی F و P قرار دارد.
 اگر $L = 4m$ باشد، حداکثر تنش فشاری مقطع در نقاط B و C به ازای



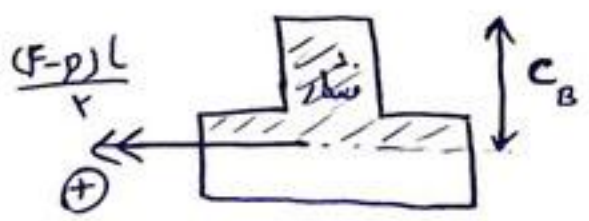
نسبتی از $\frac{F}{P}$ برابر است؟

۱۱ " ۵
 $\frac{V}{\gamma} = 2$

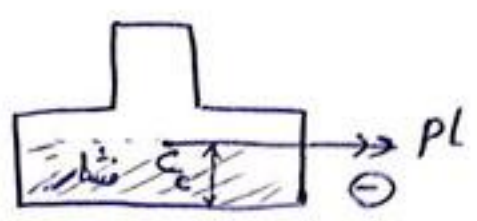
۳ " ۱۱
 $\frac{\gamma}{V} = 2$

حل: گزینی! = سطح است.

$\sum M_C = 0 \rightarrow R_A(\gamma L) + PL = FL \Rightarrow R_A = \left(\frac{F-P}{\gamma}\right) \Rightarrow M_B = \frac{(F-P)L}{\gamma} [+]$
 $M_C = PL [-]$



تنگه B



تنگه C

پس:

$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(10 \times \delta \times \frac{\delta}{\gamma}) + (\delta \times \delta \times \frac{10}{\gamma})}{(10 \times \delta) + (\delta \times \delta)} = \frac{10}{\gamma}$ [مرکز سطح از پایین سطح]

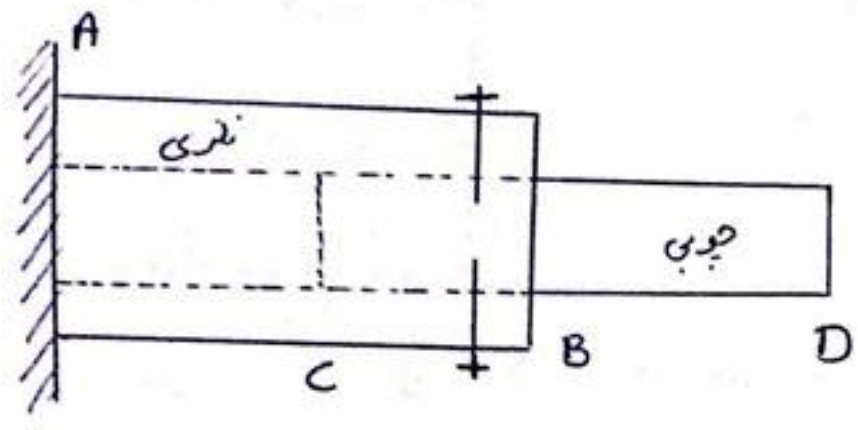
$\sigma_{max_B} = \sigma_{max_C} \Rightarrow \frac{(F-P) \frac{L}{\gamma} \times [10 - \frac{10}{\gamma}]}{I} = \frac{PL \times \frac{10}{\gamma}}{I} \Rightarrow \frac{F}{P} = \frac{11}{5}$

۷- یک میله جیبی CD به قطر ۲۰ cm در لوله‌ای فلزی AB به قطر ۷۰ cm

قرار گرفته و دور تا دور محل اتصال از پیچ‌هایی به قطر ۱۰ mm در تنش برشی مجاز ۱۴۰ Mpa استفاده شده. اگر لنگ آ در انتهای D اعمال شود، حداکثر

تنش برشی در عطف جیبی ۸ Mpa باشد، تعداد پیچ‌های لازم در محل

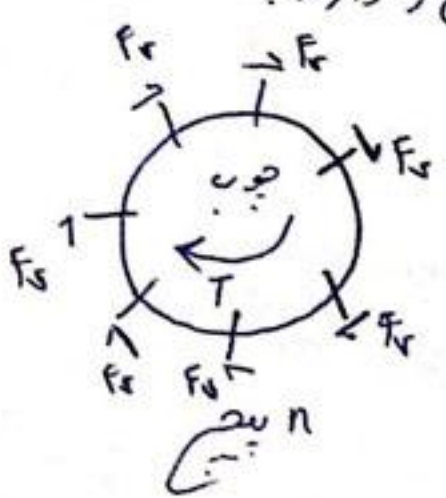
اتصال کدام است؟



- ۱۰ «۲
- ۱۲ «۱
- ۵ «۴
- ۸ «۳

حل: گزینی ۲ صحیح است. $R = 10 \text{ cm}$ $d_b = 0.1 \text{ cm}$ $\tau_{allow} = 140 \text{ Mpa}$

هر کدام از پیچ‌ها و میله‌های اتصال لنگ از میله‌ی جیبی به فلزی را دارند:



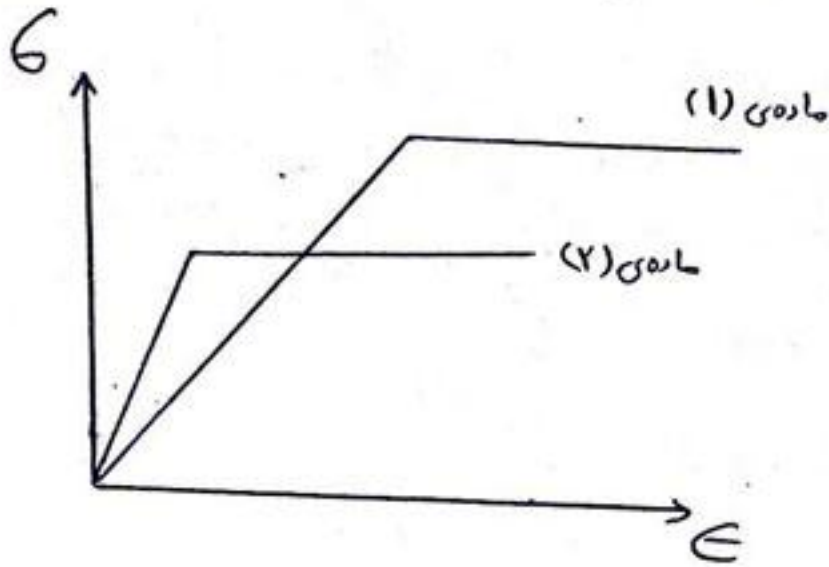
$$T = n (F_v \cdot R) \Rightarrow \frac{\tau_j}{R} = n F_v \cdot R$$

$$\Rightarrow F_v = \text{برش پیچ} = \tau_{allow} \cdot A_b$$

$$\Rightarrow n = \frac{\tau_j}{F_v \cdot R} = \frac{\tau_j}{\tau_{allow} \cdot A_b \cdot R}$$

$$\Rightarrow n = \frac{8 \times \frac{\pi}{4} (10)^2}{140 \times \frac{\pi}{4} (0.1)^2 \times (10)} = 10$$

۱ - دیاگرام تنش - کرنش مادهی شکل زیر را در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟



۱. منقعی! بیشتر از ۲ و عمارت! کمتر از ۲
۲. منقعی! بیشتر از ۲ و عمارت! بیشتر از ۲
۳. منقعی! کمتر از ۲ و عمارت! کمتر از ۲
۴. منقعی! کمتر از ۲ و عمارت! بیشتر از ۲

حل: گزینه ۴ صحیح است.
 تعبیر خط تنش - کرنش بیانگر منقعی و عمل شکستگی بیشترین عمارت را نشان می دهد پس گزینه ۴ صحیح است

۹- بارهای خود گزینی نظیر نشست و گامی، نقص عضو و اثرات دیرپه هرات
در کدام نوع سازه ها، روی توزیع نیروهای داخلی اثر دارد؟

۱۲، ناچین استاتیکی

۱۱، چین استاتیکی

۱۴، بدون اثر در نیروهای داخلی

۱۳، چین زناچین استاتیکی

حل: گزینی ۲ صحیح است.

در سازه های ناچین استاتیکی (همچون استاتیکی) در اثر عوامل لرزه ای
ذکر شده، یک نیروی همبندی معادل کننده در سازه ایجاد می شود.

۱۵ - دو سطح مستطیل و لوزی دارای مساحت و ضلع یکسان هستند. کدام
گزینه نادرست است؟

۱ « سطحی برشی لوزی بیشتر از سطحی برشی مستطیل و سطحی ضعیف مستطیل بیشتر از لوزی

۲ « سطحی برشی لوزی بیشتر از سطحی برشی مستطیل و سطحی محوری مستطیل برابر سطحی محوری لوزی

۳ « سطحی ضعیف لوزی کمتر از سطحی ضعیف مستطیل و سطحی محوری مستطیل برابر لوزی

۴ « سطحی ضعیف لوزی کمتر از سطحی ضعیف مستطیل و سطحی برشی مستطیل بیشتر از سطحی برشی لوزی

حل: گزینه ۴ صحیح است.

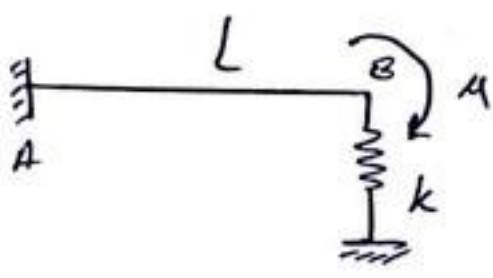
تنش مجاز برشی = σ تنش مجاز نرمال = σ_k

به طور کلی در بحث مایه‌ی ظرفیت‌های برشی و کششی، می‌گوییم در این سطح که هم کشش و
دارای مساحت یکسان هستند، هر چه قدر تجمع گوشه سطح در تار کششی بیشتر باشد
اصطلاحاً (جان) سطح نوپزتر در ظرفیت برشی افزایش می‌یابد و هر چه تجمع گوشه
سطح از تار کششی دورتر باشد اصطلاحاً می‌گوییم (بال) سطح بزرگتر شده و ظرفیت
کششی افزایش می‌یابد و ظرفیت محوری هم که به مساحت و کشش بستگی دارد برابر است.
پس گزینه ۴ در مورد سطحی برشی غلط می‌باشد زیرا لوزی بیشتر است.

11 - تیر AB به طول L و سختی خمشی EI مطابق شکل تحت گشت م وارد دارد.

به ازای چه مقادیری از α درستی نزد $(k = \frac{EI}{\alpha L^3})$ تیر در طول خود دارای

نقطه‌ی عطف است؟



$$\alpha < \frac{1}{6} \text{ "۲"}$$

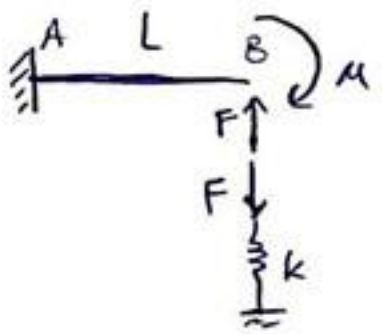
$$\alpha < \frac{1}{3} \text{ "۱"}$$

$$\alpha > \frac{1}{6} \text{ "۴"}$$

$$\alpha > \frac{1}{3} \text{ "۳"}$$

حل: گزینش ۲ صحیح است.

ابتدا نیروی فنر را می یابیم:



$$\delta_{\text{نیز}} = \delta_{\text{تیر}}$$

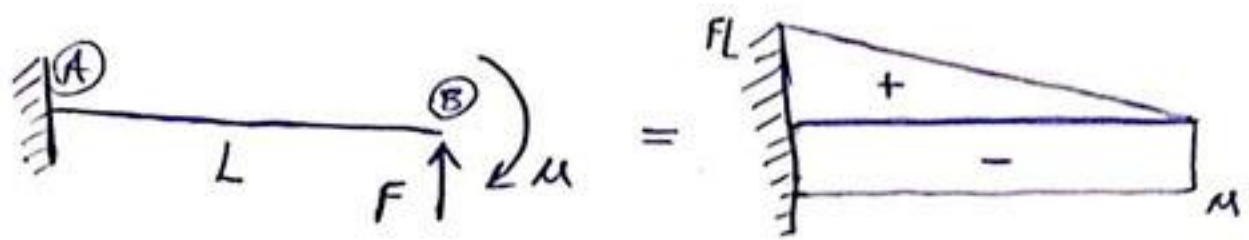
$$\Rightarrow \frac{4L^2}{2EI} - \frac{FL^3}{3EI} = \frac{F}{k} \quad \xrightarrow{k = \frac{EI}{\alpha L^3}}$$

$$\frac{4L^2}{2EI} = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{F\alpha L^3}{EI} \rightarrow \boxed{FL \left(\frac{1}{3} + \alpha \right) = \frac{4}{2}} \text{ (I)}$$

حالی خواهیم در طول تیر نقطه‌ی عطف ایجاد شود و می دانیم که نقطه‌ی عطف

نقطه‌ای است که گشت در آن صفر است پس:

نمودار گشتیرانی کشش:



برای آن که نقطه‌ی عطف ایجاد شود باید درین نقطه گشتیرانی شود. اگر $M > FL$ باشد پس همواره نمودار گشتیرانی است و هیچ وقت جایی گشتیرانی نخواهد داشت. اگر $M < FL$ باشد، چون نمودار گشتیرانی + از هم شروع شده، یعنی جایی می‌رسد که گشتیرانی + و - برابر شده و گشتیرانی شود پس باید $M < FL$ باشد:

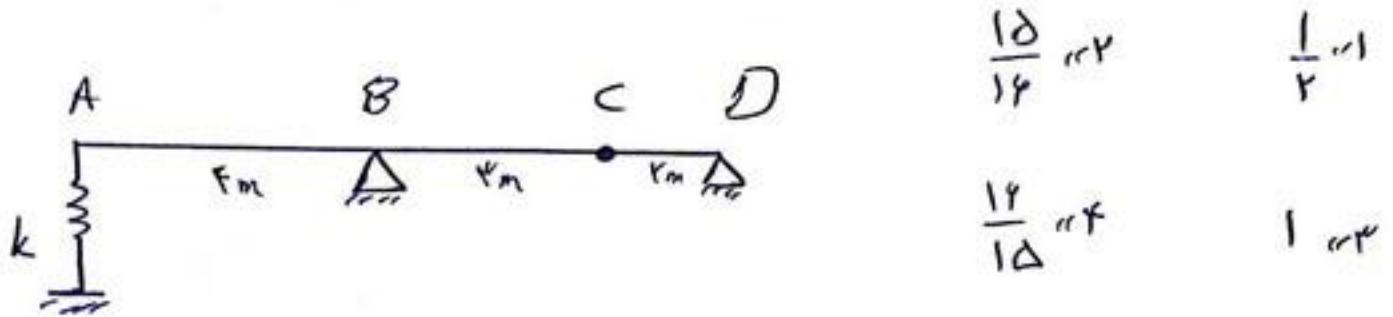
$$M < FL \xrightarrow{\textcircled{I}} 2FL \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) < FL$$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \rightarrow \alpha < \frac{1}{6}$$

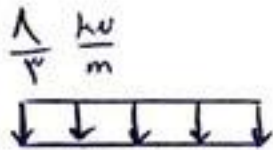
۱۲ - از روی تیر ABCD باری به نسبت $\frac{1}{3} \frac{kN}{m}$ در سه طول $5m$ می گذرد.

حد اکثر تغییر مکان قائم تکیه گاه ارتعاشی در A با نسبتی $k = 5 \frac{kN}{m}$

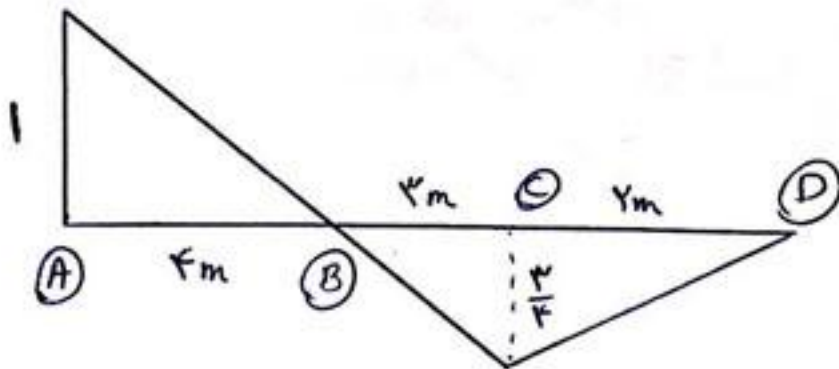
چند cm برآورد می شود؟



حل: گزینه ۵ صحیح است.



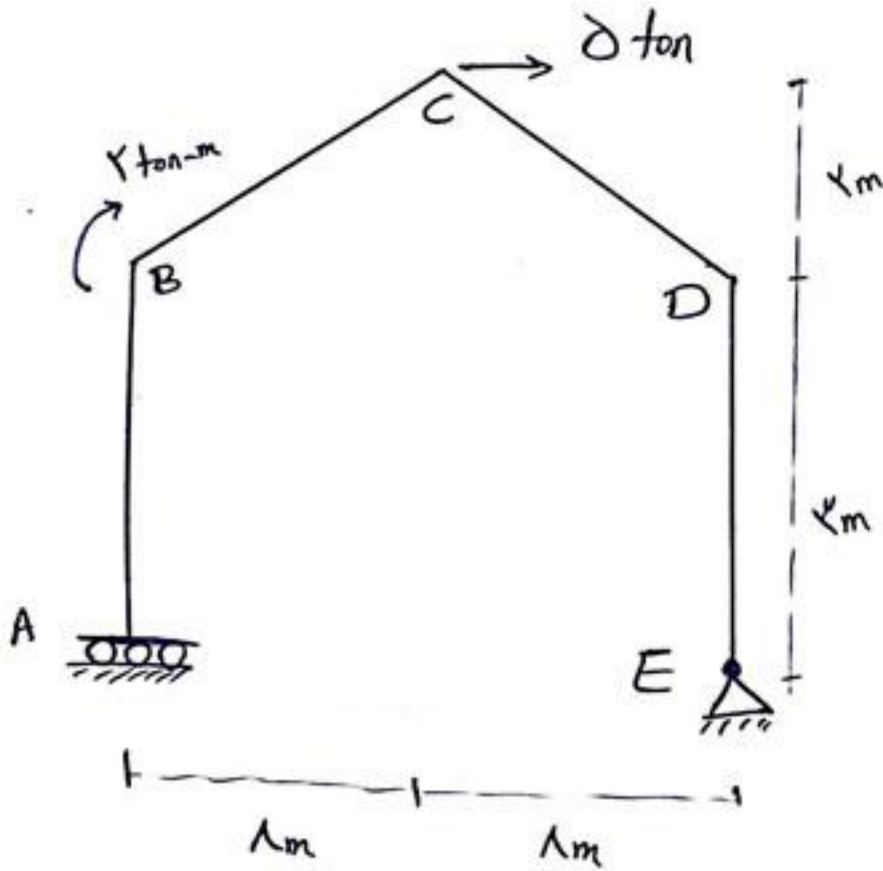
مقدار خفای تأثیر علی العزل A :



$$R_{A_{max}} = \left(\frac{F \times l}{2} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{14}{3} (kN) \rightarrow \Delta_{A_{max}} = \frac{14}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{14}{15} (cm)$$

مساحت نمودار خط تأثیر
تیرت بار
گسترده

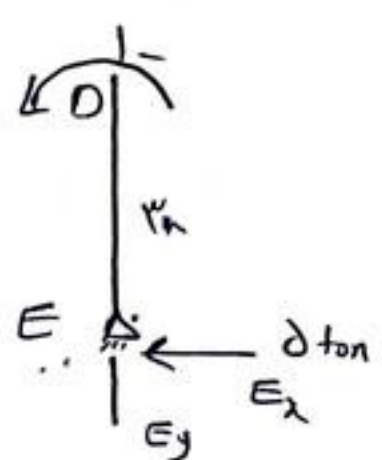
۱۳ - در قاب شیب دار، $ABCDE$ مطابق شکل، گنبد M_{DE} چند ton-m است؟
 تعیین زده می شود؟ (سختی ضعیفی دهه ی اعلا EI است)



- ۱۰ « ۱
- ۱۵ « ۲
- ۲۰ « ۳
- ۲۵ « ۴

حل: گنبدی = $\frac{1}{2}$ مجموع است.

در کل قاب: $\sum F_x = 0 \rightarrow E_x = 10 \text{ ton}$

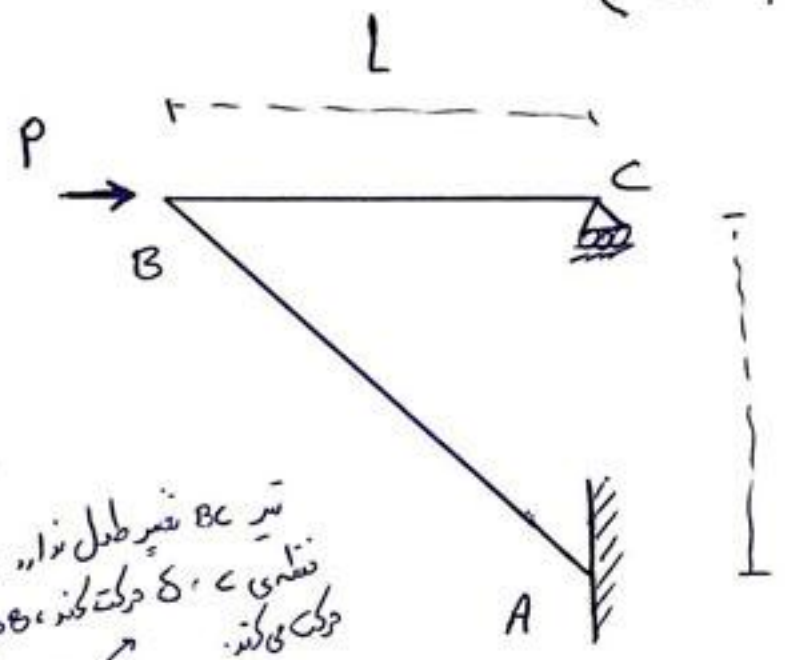


$M_{DE} = 10 \times 4 = 40 \text{ ton-m}$

۱۴ - در سازه‌ی مطابق شکل تحت اثر نیروی P در B، اگر تغییر مکان افقی

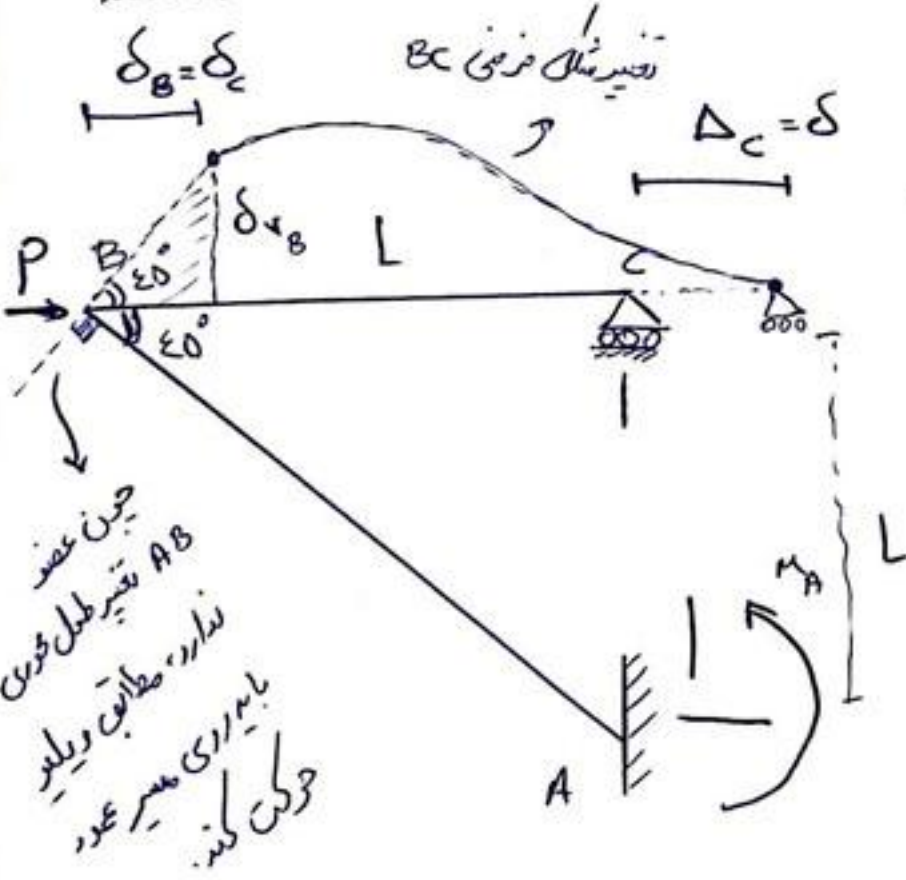
C برابر $\delta = 0.4 \frac{PL^3}{EI}$ باشد، تغییر مکان قائم B را نیز AB را

ترتیب کدام است؟ (ثابت EI)



- ۱. δ, PL
- ۲. $\delta, \sqrt{2}PL$
- ۳. $\sqrt{2}\delta, PL$
- ۴. $\sqrt{2}\delta, \sqrt{2}PL$

تغییر طول ندارد و اگر قطعی C حرکت کند، تغییر مکان می‌کند.

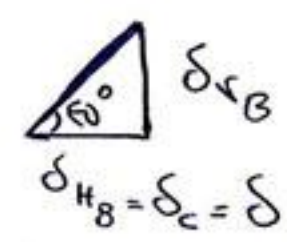


تغییر شکل فرضی BC

$\delta_B = \delta_C$

حل: گزینه ۱ = صحیح است.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A = PL$$



$$\delta_{\Delta B} = \delta$$

چون عضو AB تغییر طول نمی‌دهد، بنابراین تغییر مکان قائم B برابر با تغییر مکان افقی C است.

شکل هندسی الیاسین قائم الزامی

۱۵- در تصویر زیر به طول L و صلبیت EI تحت لنگر متمرکز M در تکیه گاه

B ، سطح محصور بین محور اولیه و منحنی الاستیک چه فرقی از $\frac{\mu L^3}{EI}$ است؟



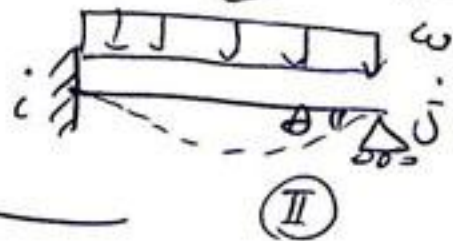
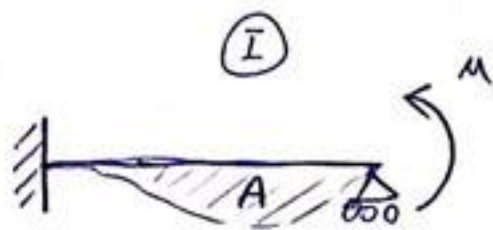
$$\frac{1}{36} \text{ "۱}$$

$$\frac{1}{48} \text{ "۲}$$

$$\frac{1}{96} \text{ "۳}$$

$$\frac{1}{72} \text{ "۴}$$

حل: گزینش ۲ صحیح است.



تبی ماکسول

$$\omega \times A = M \times \theta \Rightarrow A = \frac{M\theta}{\omega}$$

تکیه گاه منتقلی

مطابق نسبت اتم

در تیر II

$$M_{ji} = \frac{YEI}{L} (\nu\theta_j + \theta_i - \frac{3\delta_{ji}}{L}) + \frac{\omega L^2}{12} = 0$$

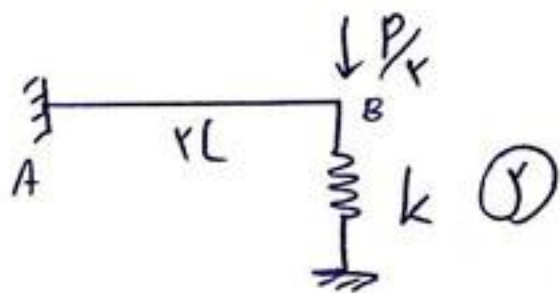
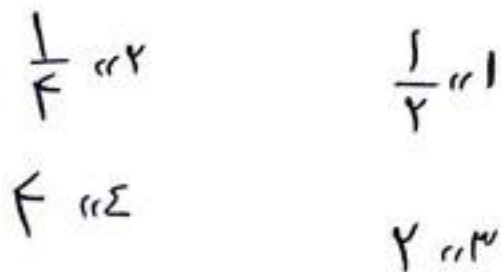
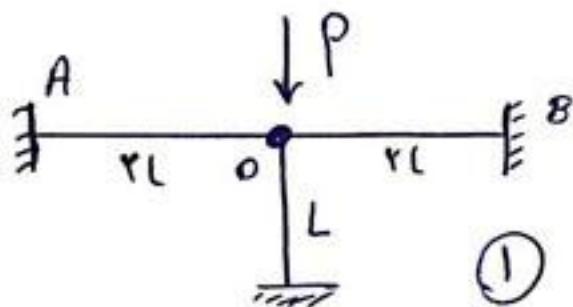
$$\Rightarrow \theta = \theta_j = \frac{\omega L^3}{48EI}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\mu L^3}{48EI} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

۱۶- مطابق دو سازه زیر، برای اینکه گنگ A در هر دو سازه برابر شود، سفتی

قدر (k) چه نسبتی از $\frac{EI}{L^3}$ باید باشد؟ (I همان انبساطی، A مساحت،

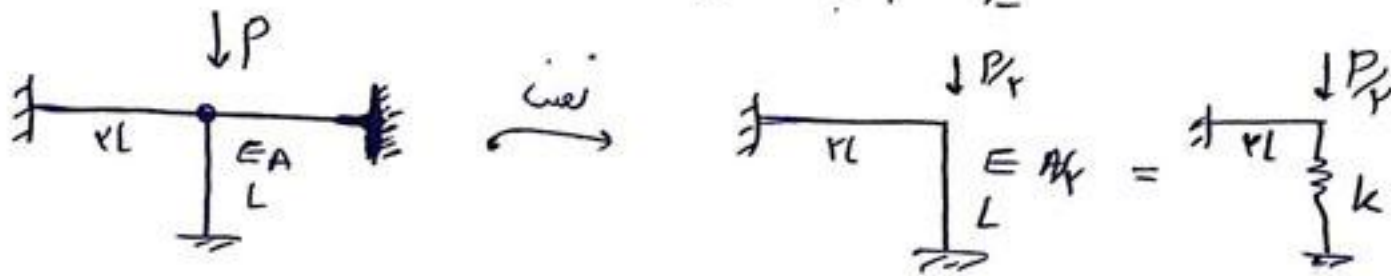
E مدول الاستیسیته، $I = AL^2$)



حل: گنگی! صدی است.

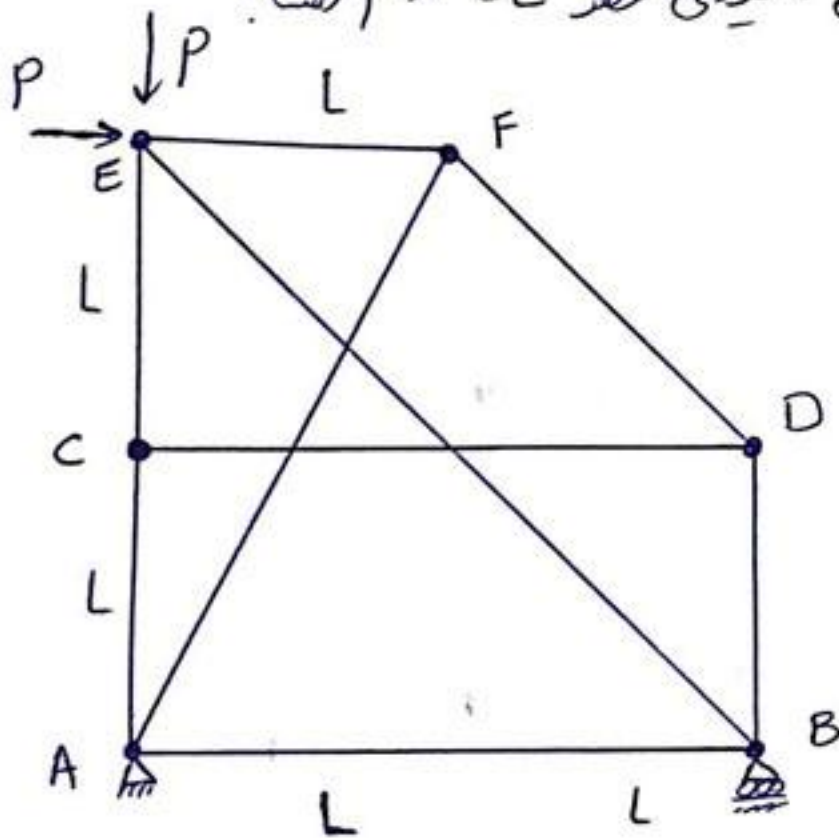
سازه‌ی دوم نصف شده‌ی سازه‌ی اول است، پس کافیت سفتی محوری میانی

وسط را نصف کنیم تا برابر k شود:



$$\Rightarrow k = \frac{EA}{2L} \xrightarrow{A = \frac{I}{L^2}} k = \frac{EI}{2L^3}$$

۱۷- در سازه‌ی فریابی عاقل، نیروی عضو BE کدام است؟



۱ « $-\sqrt{2}P$

۲ « $-\frac{\sqrt{2}}{2}P$

۳ « هنر

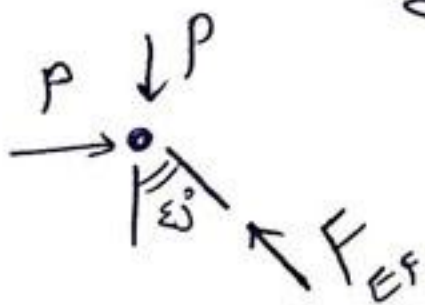
۴ « ناپایدار است.

حل: گزینی ۱ صحیح است.

اگر فریاب را بدون هیچ بارگذاری بردی کنیم، چون تمام اعضای آن هنر نیروی می‌شوند پس ناپایدار است.

① در گره C، عضو CD هنر ← در گره D عضو BD و FD هنر ←

② در گره F، عضو AF و EF هنر ←



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{EF} \sin 45^\circ = P$$

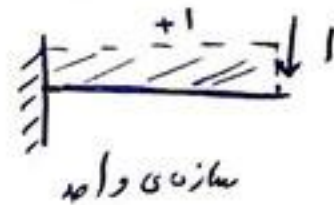
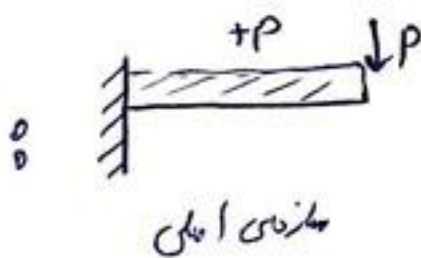
$$\Rightarrow F_{EF} = \sqrt{2}P \text{ (فشاری)}$$

۱۸- در این تیرچه به عمق h و عرض b و طول L که تحت بار P انتهای
 قرار دارد، اگر تغییر شکل ناشی از برش را در مقایسه با ضعیف در نظر بگیریم،
 چقدر درصد به جابه جایی انتهای تیر افزائی شود؟ ($b = \frac{h}{4}$ ، $L = 5h$ و
 $G = 0.4E$ مدول ارتجاعی)

۱۰۰٪ ۳٪ ۳۰۰٪ ۱۰۰٪

حل: گزینگی ۲ صحیح است.

تغییر شکل ناشی
از برش



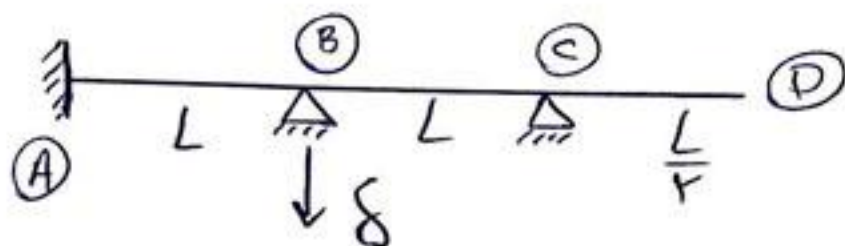
$$\delta_v = \int \frac{v(x) \cdot V(x) dx}{G \cdot A_s} = \xrightarrow{\text{قضیه سور}} \delta_v = \frac{P L \times 1}{G \times \frac{b}{4} (bh)} = \frac{4P (5h)}{G \times 5bh} = \frac{12P}{Gh}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ناشی از ضعیف: } \frac{PL^3}{3EI} \\ \text{ناشی از برش: } \frac{12P}{Gh} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{درصد افزائی}} \frac{\frac{12P}{Gh}}{\frac{PL^3}{3EI}} \times 100$$

$$\underline{\underline{\text{درصد افزائی}}} = \frac{12P \times 3EI}{PL^3 \times Gh} = \frac{12 \times 3 \times E \times \frac{bh^3}{12}}{(12 \times 5h^3) \times (0.4Eh)} \times 100 = 3\%$$

19- در تیر زیر، اگر تکیه‌گاه B به اندازه δ نشست کند، گشتاور تکیه‌گاه

A به ضریب از $\frac{EI\delta}{L^2}$ است؟



$$\frac{12}{V} \text{ "1}$$

$$\frac{14}{V} \text{ "2}$$

$$\frac{22}{V} \text{ "3}$$

$$\frac{27}{V} \text{ "4}$$

حل: پاسخ در گزینه‌ها نیست.

(FEM یا ضابطه)

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow$$

$$\left[\frac{2EI}{L} \left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\delta}{L} \right) \right]_{AB} + \left[\frac{2EI}{L} \left(\theta_B - \frac{\delta}{L} \right) \right]_{BC} = 0$$

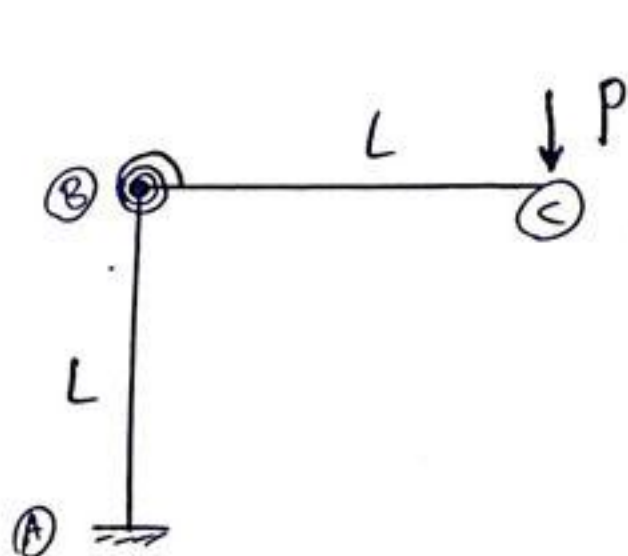
$$\Rightarrow \left(4\theta_B - \frac{4\delta}{L} \right) + \left(2\theta_B + \frac{\delta}{L} \right) = 0 \Rightarrow 6\theta_B = \frac{3\delta}{L}$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{1}{2} \frac{\delta}{L}$$

$$M_A = M_{AB} = \frac{2EI}{L} \left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\delta}{L} \right) = \frac{2EI}{L} \left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{L} - \frac{3\delta}{L} \right) = -\frac{5}{2} \frac{EI\delta}{L^2}$$

۲۰- اگر ممقی دورانى قدر $\theta = \frac{EI}{L}$ باشد، تغییر مکان انتهای طره زیربار

P چه قدری از $\frac{PL^3}{EI}$ است؟



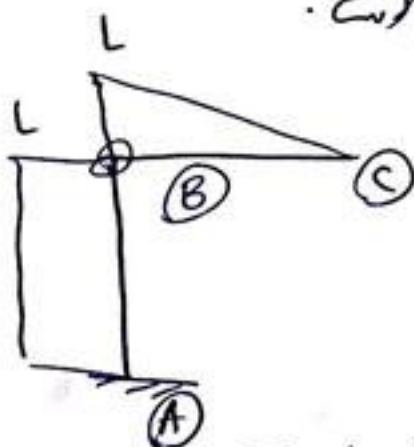
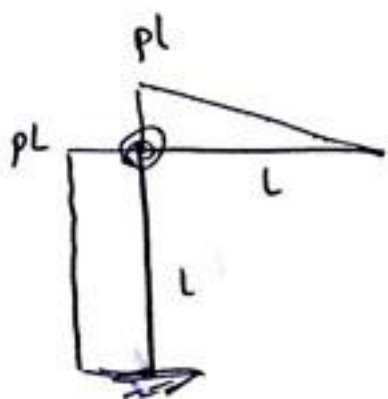
$$\frac{L}{3} \text{ "۲"}$$

$$\frac{1}{3} \text{ "۱"}$$

$$\frac{L}{3} \text{ "۴"}$$

$$\frac{L}{3} \text{ "۳"}$$

حل: گزینى $K =$ صحیح است.



کارمجازى:

$$\delta_{v_c} = \left[\frac{PL \times L}{EI} \times \frac{L}{3} \right]_{BC} + \left[\frac{PL \times L \times L}{EI} \right]_{AB} + \left[\frac{EI}{L} \right]_{\theta}$$

$$\Rightarrow \delta_{v_c} = \frac{L}{3} \frac{PL^3}{EI}$$